Le tecnologie didattiche nell'approccio ai numeri razionali

G. Chiappini, B. Pedemonte, M. Molinari
Istituto per le Tecnologie Didattiche - CNR - Genova

Il Software nel curriculum di matematica

Le proposte di riforma del curriculum di matematica elaborate dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM), sia per quanto riguarda la scuola elementare e media[1] che per la scuola superiore[2], offrono alcune indicazioni generali anche per orientare gli insegnanti nell'uso di software a supporto dei processi di insegnamento e apprendimento in campo matematico.
Nei documenti elaborati dalla CIIM vengono fornite indicazioni generali che riguardano sia la tipologia dei sistemi software che possono essere impiegati nella pratica didattica sia la metodologia d'uso di tali software.
I software che vengono indicati per essere usati nelle pratiche didattiche di matematica sono di diversa tipologia: dai sistemi di geometria dinamica, ai sistemi di office automation quali Excel, ai Computer Algebra Systems (CAS), ai sistemi ipermediali orientati al contenuto…
Osserviamo che alcuni di essi, quali i software di geometria dinamica, sono stati appositamente progettati per scopi didattici. I software didattici vengono progettati per rendere disponibili specifiche funzionalità didattiche orientate alla soluzione di problemi di insegnamento/apprendimento relativi a qualche dominio della matematica. Quindi, molte delle funzionalità didattiche che caratterizzano un software didattico fanno parte del suo progetto costitutivo e sono illustrate e giustificate sul piano cognitivo, epistemologico, oltre che su quello didattico, dal progettatore attraverso vari articoli. Tuttavia il suo uso in contesto (in particolare di software che presentano livelli elevati di flessibilità d'uso) può portare al riconoscimento di nuove funzionalità didattiche, non previste al momento della sua progettazione. Per esempio, alcune ricerche hanno mostrato come attraverso una specifica metodologia d'uso di Cabri-Géomètre in classe si possa favorire lo sviluppo di competenze nella dimostrazione di teoremi in campo geometrico (Mariotti, 2002), evidenziando una nuova funzionalità didattica di tale sistema che si aggiunge a quelle relative allo sviluppo di competenze nella soluzione di compiti di costruzione geometrica e nell'esplorazione di proprietà di figure geometriche, evidenziate dai progettatori del sistema.
Altri software indicati nel documento della CIIM, quali ad esempio i fogli elettronici o i CAS, non sono stati progettati e realizzati per scopi didattici ma per scopi professionali, cioè per risolvere compiti e problemi che caratterizzano l'attività lavorativa relativa a qualche settore della vita sociale.
Le funzionalità didattiche che vengono attribuite ai software professionali sono state individuate a posteriori, attraverso un'analisi delle loro caratteristiche di visualizzazione, interazione e computazione e lo sfruttamento di quelle che potevano prestarsi allo sviluppo di tecniche d'uso di una qualche importanza sul piano didattico.
Per esempio, le caratteristiche computazionali e rappresentative dei CAS, usati da ingegneri, fisici e matematici nelle loro pratiche professionali, sono state

[1] http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2001/matematica2001.html
[2] http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

proficuamente sfruttate per favorire lo sviluppo e la padronanza di procedimenti operativi in campo algebrico, soprattutto a livello di scuola superiore.
Per quanto riguarda la metodologia d'uso di tutti questi software, sia didattici che professionali, il documento della CIIM enfatizza un approccio metodologico basato sull'esplorazione attiva, sull'attività cooperativa e sulla discussione e riflessione in relazione alle tecniche operative impiegate. Si tratta di un approccio metodologico che viene definito di laboratorio di matematica, volto alla costruzione di una ricca e significativa base esperienziale per consentire agli studenti di padroneggiare specifiche tecniche matematiche e giustificarle sul piano teorico.
In questo articolo intendiamo presentare un'esperienza di innovazione didattica relativa alla progettazione, realizzazione e sperimentazione di due software didattici orientati all'esplorazione delle proprietà dei numeri razionali e alla dimostrazione di tali proprietà.
I due software sono stati realizzati nell'ambito di un progetto europeo denominato ITALES (Innovative Teaching And Learning Environment for School, IST-2000-26356) e costituiscono due micromondi incorporati in un sistema più articolato e complesso, il sistema ARI-LAB-2, orientato allo sviluppo di competenze nel problem solving aritmetico e nel primo approccio all'algebra. In questo lavoro illustreremo le scelte che hanno portato alla progettazione e realizzazione dei due micromondi, e giustificheremo, sul piano cognitivo ed epistemologico, le funzionalità didattiche che abbiamo voluto incorporare in essi. Presenteremo quindi le caratteristiche principali di un percorso didattico, sperimentato in una classe di scuola media, che sfrutta le funzionalità dei due micromondi per favorire un approccio consapevole ai numeri razionali e alle frazioni.

Natura dei problemi didattici nell'approccio ai numeri razionali
La tematica dei numeri razionali e delle frazioni è centrale nel curriculum di matematica soprattutto a livello di scuola secondaria di primo e secondo grado.
A seguito del fondamentale lavoro di Kieran su questo tema (Kieran, 1975), molte ricerche hanno indagato sulle difficoltà che gli alunni incontrano nello sviluppo di concetti relativi ai numeri razionali[3]. Varie ricerche hanno messo in rilievo le diverse interpretazioni che i numeri razionali e le frazioni possono presentare in differenti contesti di applicazione[4]. Per esempio la frazione può essere interpretata come descrizione di una relazione parte-intero, cioè come una descrizione della ripartizione di un oggetto in parti; le frazioni inoltre possono essere viste come oggetti che possono essere confrontati, sommati, sottratti…. Il numero razionale può essere visto come risultato di una divisione tra due numeri interi o come rapporto, cioè come confronto moltiplicativo tra due quantità. Il numero razionale può ancora essere inteso come operatore, cioè come qualcosa che opera su una quantità e la cambia, come probabilità, come punto su una retta orientata… [5]
E' stato messo in rilievo che solo attraverso lo sviluppo di interpretazioni di questo tipo per mezzo di pratiche didattiche significative, gli alunni possono costruirsi un'idea pertinente di numero razionale e di frazione e comprendere le proprietà che

[3] Si veda al riguardo il seguente sito del Rational Number Project http://education.umn.edu/rationalnumberproject/default.html che contiene un alto numero di pubblicazioni realizzate da ricercatori che si sono occupati dell'argomento.
[4] In questo lavoro facciamo riferimento alla seguente definizione matematica di numeri razionali e frazioni: I numeri razionali sono elementi di un campo quoziente infinito che consiste di infinite classi di equivalenza e gli elementi delle classi di equivalenza sono frazioni (Beher e Al., 1993).
[5] Questa lista di interpretazioni non ha la pretesa di essere esaustiva.

caratterizzano questi nuovi oggetti matematici al centro del processo di insegnamento apprendimento.
Tuttavia la ricerca didattica non ha ancora fornito indicazioni chiare e condivise sulle pratiche didattiche in grado di facilitare la costruzione di concetti relativi ai numeri razionali[6].
Vi è comunque un generale accordo sul fatto che le difficoltà degli alunni nella costruzione di concetti relativi ai numeri razionali e alle frazioni sono principalmente di natura semantica e non di natura puramente sintattica come invece lascerebbe presupporre il tipo di pratica didattica che viene spesso sviluppato nelle classi.
A tale riguardo osserviamo che con l'approccio ai numeri razionali e alle frazioni suggerita in molti libri di testo si evidenzia molto spesso una forte divaricazione tra il piano dell'operatività con la notazione frazionaria e il piano dei significati.
I risultati conseguiti con gli alunni mostrano che la didattica corrente non è in grado di costruire una base di esperienze e di significati appropriati nell'uso della notazione frazionaria[7]. Vi è mancanza di stabilità nella conoscenza costruita; nei casi migliori gli alunni imparano ad usare correttamente regole di calcolo ma mostrano difficoltà nell'assegnare significati alle azioni compiute o nel dare loro giustificazioni accettabili.
Notiamo che la didattica corrente si basa principalmente su un approccio normativo e prescrittivo: Se vuoi sommare due frazioni con lo stesso numeratore allora fai così… ; Se invece le due frazioni hanno denominatore diverso allora prima devi….
Si tratta dello stesso approccio che caratterizzerà in seguito anche l'insegnamento dell'algebra, cioè di un approccio principalmente basato sull'insegnamento e il consolidamento di tecniche operative.

Il ruolo delle tecniche nell'approccio ai numeri razionali

E' noto che la conoscenza matematica è basata su una dialettica produttiva tra teoria e pratica. Il quadro operazionale-strutturale elaborato dalla Sfard (Sfard, 1991) mette ben in evidenza la natura di questa dialettica. In base a questo quadro un oggetto matematico può essere interpretato sia in modo operazionale che in modo strutturale. E' interpretato operazionalmente quando esso è visto come processo da essere eseguito, mentre è interpretato strutturalmente quando è visto come un oggetto dotato di determinate proprietà che lo caratterizzano strutturalmente in relazione ad altri oggetti. Quando si usa una tecnica per ordinare frazioni o per eseguire un calcolo tra frazioni possiamo essere interessati al risultato pratico, se l'attenzione viene concentrata sugli aspetti operazionali e procedurali che portano al risultato cercato. La stessa tecnica può anche essere considerata in una prospettiva teorica, se si considerano gli aspetti che la caratterizzano strutturalmente o che la giustificano sul piano teorico.
Una tecnica matematica costituisce quindi un elemento chiave della dialettica tra teoria e pratica in matematica
Notiamo che in generale una tecnica è un modo di risolvere un compito e ogni tecnica si compone di ragionamenti e di operazioni di tipo meccanico ed automatico. Le tecniche possono essere percepite e valutate in termini di *valore pragmatico*, cioè focalizzando l'attenzione sul loro potenziale produttivo in relazione al compito,

[6] Alcune proposte didattiche suggeriscono attività basate su insiemi di quantità discrete, altre, invece, orientano verso attività basate su grandezze continue…. Vi sono proposte didattiche centrate su attività con il numero decimale associato alla frazione, mentre altre si basano esclusivamente sull'uso della notazione frazionaria…
[7] Per un'alta percentuale di alunni all'inizio della scuola superiore il doppio di 2/3 è 4/6

all'efficienza, ai costi. Le tecniche sono anche caratterizzate da un *valore epistemico*, poiché esse contribuiscono alla comprensione degli oggetti matematici che esse coinvolgono e possono essere fonte di domande nell'ambito dell'attività matematica che possono portare alla costruzione di significati che vanno al di là di quelli coinvolti nella soluzione del compito specifico in cui esse sono impiegate (Artigue, 2001).
Molto spesso nell'approccio tradizionale ai numeri razionali e alle frazioni l'attenzione viene focalizzata sullo sviluppo di tecniche operative con le frazioni senza però offrire agli alunni la possibilità di cogliere il valore funzionale di tali tecniche in contesti reali e senza sviluppare la capacità di giustificarle in base a significati ben fondati sul piano concettuale e teorico. In questi casi l'attenzione si concentra sull'acquisizione degli aspetti operazionali della tecnica, al meglio mettendo in risalto alcuni elementi che contribuiscono a caratterizzare il suo valore pragmatico, attraverso alcune applicazioni pratiche. In generale si trascura di affrontare problematiche di tipo strutturale relative alla tecnica che si vuole insegnare, limitando quindi la possibilità di cogliere il suo valore epistemico. Varie sono le cause che determinano un approccio didattico di questo tipo: il peso della tradizione didattica orientata storicamente allo sviluppo di competenze operative di calcolo, mancanza di strumenti per favorire la riflessione sugli aspetti strutturali della tecnica, carenza di proposte didattiche innovative, maggiore difficoltà nella gestione in classe di una pratica didattica orientata alla giustificazione e all'inquadramento teorico delle tecniche impiegate…
E' noto che per fare matematica e per apprendere nuove conoscenze matematiche occorre imparare ad usare tecniche che, per ragioni di efficienza nello sviluppo di ogni attività, devono diventare routine (Artigue, 2001).
Osserviamo però che se l'attività matematica si riduce solo all'appropriazione e all'uso di specifiche tecniche, essa perde il suo carattere culturale e conoscitivo, diventa prescrizione, una serie di ricette da applicare in compiti meccanici e ripetitivi che vengono "accettate" dagli studenti in base al principio di autorità dell'insegnante. Ciò, purtroppo, è quello che caratterizza molto spesso l'attività con le frazioni dentro l'istituzione scolastica.

Un modello innovativo di pratica didattica nell'approccio ai numeri razionali
Per affrontare le problematiche discusse sopra, è stato proposto per alcuni anni, in classi della scuola media, un progetto didattico innovativo[8] per favorire un approccio "consapevole" ai numeri razionali (Chiappini & al., 2000; Chiappini & Molinari, 1998; Chiappini & Molinari, 1997). Le attività didattiche proposte in questo progetto si basano sull'uso della linea dei numeri e sono caratterizzate da una operatività centrata su un artefatto geometrico in cui è soggiacente il teorema di Talete.
Tale artefatto è costituito da due semirette che hanno origine comune, ciascuna caratterizzata da un'unità di misura. Una semiretta, detta semiretta dei numeri, serve per rappresentare i numeri razionali, la seconda semiretta, detta semiretta ripartitrice o moltiplicatrice, permette di realizzare tecniche di ripartizione o di riporto di lunghezze individuate sulla semiretta dei numeri.
Inizialmente l'artefatto viene presentato agli studenti come strumento operativo per compiere ripartizioni di lunghezze. In figura 1 viene riportata la ripartizione della lunghezza L in 6 parti.

[8] Per informazioni supplementari sul progetto consultare il sito Internet: http://www5.indire.it:8080/set/set_modelli/UL/G/modGmat/pres.html.

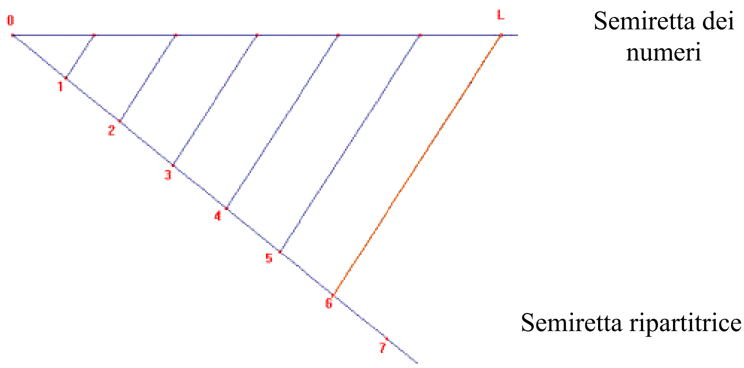


Figura 1: Ripartizione di una lunghezza L in 6 parti mediante l'artefatto geometrico basato sul teorema di Talete

Con tale artefatto, una frazione corrisponde ad un punto sulla semiretta dei numeri, costruito ripartendo una lunghezza in un certo numero di parti. Per esempio in figura 1, il primo punto sulla semiretta dei numeri corrisponde alla frazione L/6, il secondo punto corrisponde alla frazione 2*L/6 ecc.

L'artefatto consente di esplorare le proprietà dei numeri razionali, proprietà che possono essere controllate sul piano percettivo, prima che su quello concettuale. Per esempio, l'esplorazione con l'artefatto consente di mettere in evidenza che la frazione 1/2 è la frazione più grande fra tutte quelle che hanno numeratore unitario (escluso 1) e che le frazioni tendono ad addensarsi man mano che ci si avvicina allo 0 (vedi figura 2).

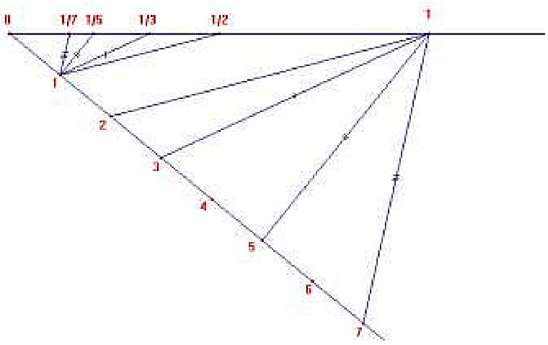


Figura 2: Esplorazione dell'ordinamento di frazioni aventi numeratore unitario

L'esplorazione descritta può quindi essere sfruttata per realizzare in classe vari tipi di riflessione sull'ordinamento delle frazioni con numeratore unitario, mettendo in evidenza proprietà che lo caratterizzano.

Le sperimentazioni condotte hanno mostrato che l'uso dell'artefatto è veramente in grado di consolidare la costruzione di significati nell'approccio ai numeri razionali e alle operazioni con frazioni.

Tali significati vengono costruiti attraverso lo sviluppo di tecniche di ripartizione realizzate con riga e squadra che permettono agli alunni un approccio esplorativo delle proprietà dei numeri razionali e delle operazioni con frazioni. Si tratta di tecniche che producono effetti interamente controllabili sul piano percettivo motorio e che possono essere facilmente interpretate all'interno del contesto dell'attività. In questo modo, i significati costruiti possono essere messi in corrispondenza con le tecniche di trattamento della notazione frazionaria, contribuendo ad assegnare ad esse un significato appropriato e padroneggiabile da parte degli alunni.

Le sperimentazioni hanno però evidenziato anche alcuni limiti di tipo didattico riferiti

principalmente alle condizioni della praticabilità e della gestione dentro la classe dell'artefatto geometrico.
Lo sviluppo in classe del progetto richiede insegnanti molto preparati e curiosi di sperimentare un approccio profondamente diverso da quello normativo e prescrittivo che appartiene alla tradizione didattica. Lo sviluppo del progetto pone problemi cruciali di formazione degli insegnanti.
Inoltre esso esige tempi lunghi per lo sviluppo. L'interiorizzazione dei significati connessi con l'uso delle tecniche di ripartizione richiede parecchio tempo, soprattutto con studenti che appartengono alla fascia medio-bassa della classe.
L'operatività con l'artefatto pone costantemente problemi di gestione in classe non sempre controllabili a priori da parte degli insegnanti. Tali problemi dipendono principalmente dalla varietà di effetti che lo strumento che si ha a disposizione può produrre (semplicemente la scelta di una diversa unità di misura sulle semirette da parte degli alunni può essere causa di un forte rallentamento nello sviluppo dell'attività). Inoltre, la staticità della rappresentazione grafica può porre problemi di tipo percettivo (può esserci ambiguità sulla collocazione dei punti corrispondenti a frazioni sulla semiretta dei numeri).
Le sperimentazioni hanno inoltre mostrato che l'uso di questo strumento è particolarmente appropriato per l'avvio degli alunni alla dimostrazione.
Proprietà evidenti delle frazioni, percepite attraverso la rappresentazione geometrica, vengono espresse in enunciato verbale, tradotte in linguaggio algebrico (i.e. a/b=a*1/b) e assunte come assiomi di base del quadro teorico all'interno del quale gradualmente vengono costruite nuove congetture ed enunciate nuove proprietà. Attraverso l'uso di tali assiomi vengono dimostrate le congetture realizzate che vengono assunte come teoremi del quadro teorico. Osserviamo però che per svolgere questa attività di approccio alla dimostrazione l'insegnante non ha a disposizione alcuno strumento di mediazione. I copioni dimostrativi forniti dall'insegnante devono essere interiorizzati dagli alunni i quali hanno a loro disposizione solo il proprio quaderno.
Le sperimentazioni condotte hanno pertanto evidenziato la necessità di nuovi artefatti che possano svolgere una funzione di mediazione dell'azione (di insegnante e studenti) e della comunicazione (tra insegnante e studenti) più efficace di quella svolta dall'artefatto disponibile durante lo sviluppo dell'attività.

I nuovi artefatti realizzati

Innanzitutto dobbiamo precisare il significato che attribuiamo ai termini "artefatto" e "strumento" precedentemente utilizzati.
In questo lavoro consideriamo lo strumento come un'entità composta che comprende un artefatto insieme alle sue tecniche d'uso, così come sono viste e interpretate da un utente nel suo contesto d'uso (Rabardel, 1995).
Un artefatto può essere sia materiale che simbolico. La lingua scritta, un sistema di rappresentazione numerico (per esempio la notazione frazionaria), il linguaggio algebrico, il compasso, un software didattico, ma anche un martello, una macchina, un qualsiasi dispositivo costituiscono esempi di artefatto.
Possiamo considerare l'artefatto come caratterizzato da specifiche proprietà strutturali, che l'utente può sfruttare per perseguire uno scopo nell'ambito di una certa attività. Per perseguire lo scopo il soggetto sfrutta le proprietà dell'artefatto secondo determinate tecniche d'uso che gli consentono di attualizzare specifiche funzionalità orientate allo scopo desiderato. L'artefatto quindi è innanzitutto l'elemento mediatore dell'azione di un soggetto nell'ambito di un'attività orientata ad uno scopo.

Sia l'artefatto che le tecniche d'uso sono soggette ad una evoluzione continua. Secondo Rabardel questa evoluzione può essere orientata verso l'artefatto, con l'arricchimento di proprietà, o verso il soggetto, con lo sviluppo di nuove tecniche d'uso e/o l'attribuzione di nuove funzionalità all'artefatto. Per esempio, l'artefatto geometrico su carta, precedentemente descritto, è dotato di specifiche proprietà geometriche che possono essere sfruttate attraverso tecniche d'uso (con riga e squadra) per attualizzare ripartizione e quindi costruire frazioni sulla semiretta dei numeri. Lo studio di come sfruttare sul piano didattico queste caratteristiche dell'artefatto ha portato ad evidenziare specifiche funzionalità didattiche in relazione ad un suo possibile uso nel contesto scolastico. Le sperimentazioni condotte hanno però messo in evidenza anche i limiti relativi al suo uso. L'analisi dei risultati delle sperimentazioni condotte ha portato all'emergere di nuovi bisogni didattici e ciò ha condotto alla progettazione di un nuovo artefatto, che costituisce una trasformazione del precedente, realizzato sfruttando le nuove potenzialità d'interattività e di dinamicità offerte oggi dalla tecnologia. Attraverso questa trasformazione nuove proprietà sono state incorporate all'interno del nuovo artefatto. Come conseguenza di questo cambiamento di proprietà, nuove funzionalità didattiche possono essere attribuite al nuovo artefatto così trasformato.
Nel seguito metteremo in evidenza le proprietà che caratterizzano i due nuovi artefatti che abbiamo progettato e realizzato per migliorare il processo di insegnamento e apprendimento nel campo dei numeri razionali. Si tratta di due micromondi, il Micromondo Frazioni e il Micromondo di Manipolazione aritmetica, che sono costitutivi del nuovo sistema ARI-LAB-2.

Il Micromondo Frazioni

Per comprendere meglio le proprietà del Micromondo Frazioni confronteremo le tecniche operative che caratterizzano rispettivamente la linea dei numeri, l'artefatto geometrico su carta basato sul teorema di Talete, il Micromondo Frazioni.
La linea dei numeri è sempre stata usata dai matematici per rappresentare frazioni. Notiamo che le tecniche di rappresentazione di frazioni sulla linea dei numeri comportano compiti di esecuzione di operazioni aritmetiche e compiti di misura di lunghezze. Per rappresentare la frazione 2/3 sulla linea dei numeri occorre trovare prima il decimale associato alla frazione e poi rappresentarlo tenendo conto dell'unità di misura scelta e dell'approssimazione. Si tratta quindi di una tecnica di rappresentazione che è aritmetizzata. Osserviamo che la linea dei numeri permette inoltre di mettere in atto tecniche dirette di addizione e sottrazione di lunghezze corrispondenti a frazioni (sommando o sottraendo una lunghezza ad un'altra con il compasso) ma non permette di mettere in atto operazioni di moltiplicazione e divisione fra frazioni.
Con l'artefatto geometrico su carta, la rappresentazione di una frazione sulla linea dei numeri si realizza attraverso una ripartizione di una lunghezza basata sul teorema di Talete. Per esempio, per rappresentare la frazione 2/3 si deve ripartire la lunghezza 2 sulla linea dei numeri in 3 parti attraverso una tecnica di ripartizione che sfrutta il teorema di Talete. Inoltre, questo artefatto consente di realizzare anche operazioni di moltiplicazione e divisione di frazioni, riportando o ripartendo una lunghezza corrispondente ad una frazione sulla linea dei numeri tramite la semiretta moltiplicatrice (o ripartitrice).
Quindi, con questo artefatto, tutte le tecniche di rappresentazione di frazioni e di esecuzione di operazioni tra frazioni sono di tipo geometrico, controllabili sul piano percettivo.

Questo ovviamente può porre problemi di ambiguità percettiva; per esempio punti corrispondenti a frazioni diverse possono apparire come coincidenti nella rappresentazione.
Osserviamo che per operare con questo artefatto l'alunno deve possedere una buona padronanza delle tecniche geometriche di ripartizione. Ciò richiede in generale molto tempo, soprattutto con alunni deboli. La rappresentazione che si ottiene è inoltre statica.
Con il Micromondo Frazioni le tecniche di natura geometrica coinvolte nella rappresentazione su carta sono reificate nell'interfaccia del micromondo per mezzo di comandi.

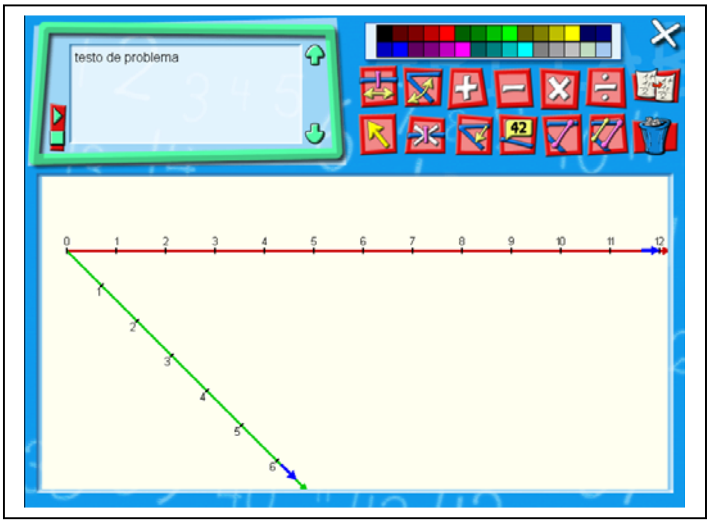
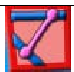
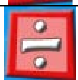
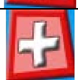
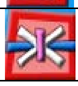


Figura 3. Interfaccia del Micromondo Frazioni

La seguente tabella riporta i principali comandi disponibili con questo micromondo con una breve descrizione delle loro funzionalità.

Comando:	**Permette di:**
	Costruire un segmento tra due punti selezionati rispettivamente sulla semiretta dei numeri e sulla semiretta ripartitrice.
	Costruire un segmento parallelo ad uno rappresentato passante per un punto della semiretta ripartitrice.
	Costruire una frazione sulla semiretta dei numeri come ripartizione di una lunghezza in parti tramite la semiretta ripartitrice.
	Costruire il punto corrispondente alla somma di due frazioni sulla semiretta dei numeri come somma di due lunghezze.
	Costruire il punto corrispondente alla differenza di due frazioni sulla semiretta dei numeri come differenza di due lunghezze.
	Costruire il punto corrispondente al prodotto di due frazioni sulla semiretta dei numeri come riporto di una lunghezza tramite la semiretta moltiplicatrice.
	Modificare l'unità di misura sulla semiretta dei numeri o sulla semiretta ripartitrice o moltiplicatrice.
	Modificare l'angolo di inclinazione tra le due semirette.
	Riportare sulla semiretta ripartitrice o moltiplicatrice un punto costruito sulla semiretta dei numeri.
	Cancellare un qualsiasi oggetto costruito per mezzo dei comandi del micromondo (punto, segmento…).

L'alunno può interagire con tali comandi e osservare gli effetti prodotti dal sistema in relazione alle azioni da lui compiute. Tali effetti possono essere facilmente compresi usando la propria esperienza spaziale.
Per esempio le figure seguenti mostrano la costruzione del punto corrispondente alla frazione 3/4 sulla semiretta dei numeri tramite il comando che costruisce frazioni. La tecnica di costruzione consiste nel selezionare, con il mouse, la lunghezza 3 sulla semiretta dei numeri e la lunghezza 4 sulla semiretta ripartitrice.
In risposta a queste azioni di selezione di lunghezze realizzate dall'alunno, il sistema produce l'effetto di ripartizione visualizzato in figura 4 e contemporaneamente costruisce l'espressione simbolica associata al primo punto della ripartizione sulla semiretta dei numeri (3/4).

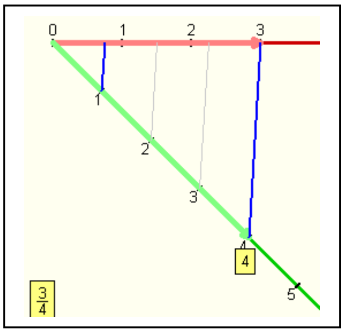


Figura 4. Costruzione della frazione 3/4

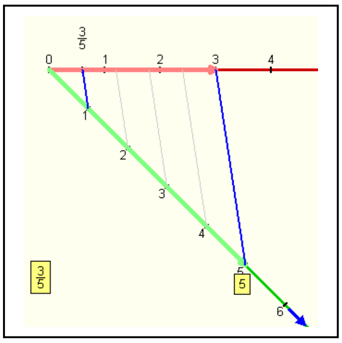


Figura 5. Costruzione della frazione 3/5

Notiamo che si tratta di un effetto che presenta una natura fortemente interattiva e dinamica: se si sposta il mouse sul punto 5 della semiretta ripartitrice il sistema visualizzerà una ripartizione della lunghezza 3 in 5 parti e l'espressione simbolica associata al primo punto della ripartizione (3/5) come mostrato in figura 5.

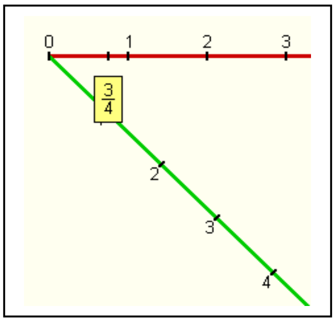


Figura 6. Visualizzazione della frazione 3/4

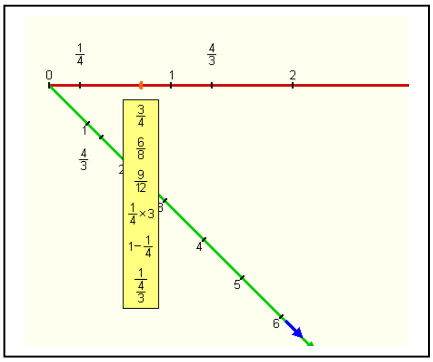


Figura 7. Post-it associato ad un punto contenente tutte le frazioni o espressioni costruite

Scelta la ripartizione (click del mouse sul punto 4 della semiretta ripartitrice) l'effetto grafico di ripartizione scompare e risulta visualizzato il punto corrispondente alla frazione 3/4 sulla semiretta dei numeri (figura 6).
Rispetto alla rappresentazione su carta, statica e non interattiva, il cambiamento nella mediazione fornita da questa proprietà del sistema è notevole. L'alunno può esplorare e usare questa proprietà, può interagire con essa per costruirsi un'idea di come per esempio il significato di 3 combinato con quello di 4 produce un significato per la notazione 3/4.

L'esempio descritto mette in evidenza che il Micromondo Frazioni, rispetto all'artefatto su carta, è caratterizzato da due nuove proprietà strettamente integrate tra loro: l'interattività e la dinamicità.
Per quanto riguarda l'interattività, il sistema rende disponibili due forme di retroazione in corrispondenza dell'azione dell'utente:

- una retroazione di tipo geometrico, come nell'esempio prima riportato, quando ad una modifica della selezione di una lunghezza sulla semiretta ripartitrice il sistema risponde con una modifica nella ripartizione (vedi figure 4 e 5).
- una retroazione di tipo simbolico associata a quanto realizzato, in termini geometrici, con la mediazione dell'artefatto. Per esempio alla costruzione di un punto sulla semiretta dei numeri corrispondente a una ripartizione di una lunghezza in parti, il sistema risponde associando a tale punto un post-it che contiene la notazione della frazione relativa a tale punto (vedi figura 6). Osserviamo inoltre che tale post-it può contenere tutte le espressioni simboliche relative ai processi operativi di tipo geometrico che possono essere realizzati in relazione a tale punto. Per esempio, il post-it di figura 7 associato al punto corrispondente a 3/4, riporta anche una serie di espressioni simboliche che sono state ottenute attraverso differenti processi costruttivi di tipo geometrico per mezzo dei comandi del micromondo.

Anche la dinamicità si esprime sia in termini geometrici che in termini simbolici. Per quanto riguarda l'aspetto geometrico, la dinamicità si esprime attraverso la possibilità di modificare l'unità di misura sulla semiretta dei numeri e sulla semiretta ripartitrice o moltiplicatrice. Spostando direttamente con il mouse il punto corrispondente alla misura unitaria su queste semirette è possibile osservare dinamicamente i cambiamenti che si realizzano nella rappresentazione geometrica visualizzata sullo schermo (vedi figura 8).

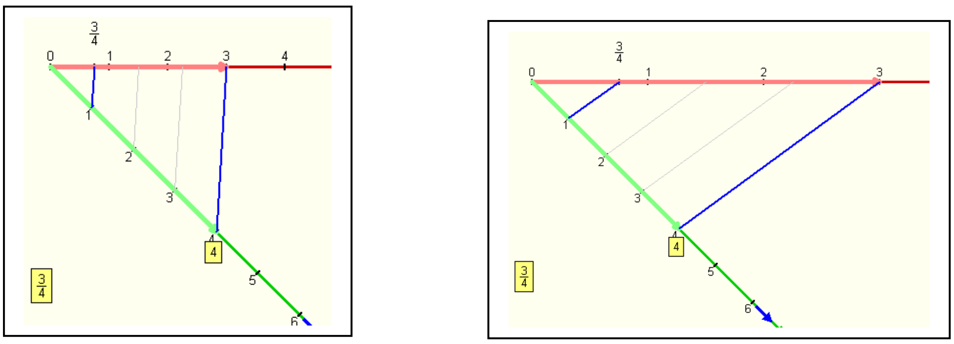


Figura 8. Effetto prodotto dal cambiamento dell'unità di misura sulla semiretta dei numeri

Notiamo che con l'artefatto su carta si era obbligati a utilizzare un nuovo foglio ogni volta che si voleva cambiare unità di misura ad una delle due semirette dell'artefatto. Questo tipo di dinamicità diventa strumento da una parte per interpretare le ambiguità percettive che possono emergere nella costruzione di punti corrispondenti a frazioni o a operazioni tra frazioni sulla semiretta dei numeri e dall'altra per esplorare proprietà dei numeri razionali e delle operazioni con tali numeri che si conservano con la modifica dell'unità di misura. Sul piano didattico la dinamicità è strumento importante per gli alunni per verificare o testare le ipotesi che essi costruiscono intorno a tali proprietà.
Per quanto riguarda la dinamicità di tipo simbolico, essa è connessa ai processi di costruzione di punti sulla semiretta dei numeri come risultato di operazioni di somma,

sottrazione, moltiplicazione e divisione di lunghezze selezionate su di essa e si esprime attraverso l'attualizzazione dinamica sullo schermo dell'espressione simbolica associata al processo di costruzione in atto.

Il Micromondo di Manipolazione Aritmetica

Cercheremo adesso di comprendere le proprietà che caratterizzano il Micromondo di Manipolazione Aritmetica e le sue funzionalità didattiche mettendo in evidenza l'evoluzione delle tecniche nel passaggio dalla dimostrazione con carta e penna alla dimostrazione nel micromondo. Cercheremo inoltre di mettere in evidenza le diverse proprietà e le diverse funzionalità didattiche ad esso associate rispetto ai CAS disponibili oggi sul mercato.

L'interfaccia del micromondo è costituita da una serie di tasti che incorporano le proprietà elementari delle operazioni aritmetiche e alcuni assiomi di base che possono essere utilizzati per dimostrare l'equivalenza di due espressioni numeriche in Q. Gli assiomi dell'interfaccia sono suddivisi in vari gruppi: gli assiomi di tipo additivo, gli assiomi di tipo moltiplicativo, la proprietà distributiva, gli assiomi sulle frazioni (vedi figura 9).

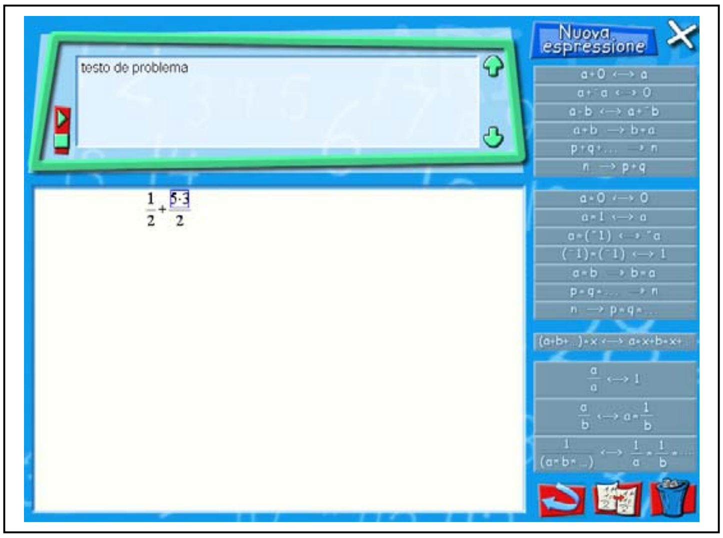


Figura 9. Interfaccia del Micromondo di Manipolazione Aritmetica

Già nell'inserimento dell'espressione da manipolare è possibile evidenziare un cambiamento rispetto all'attività con carta e penna. Per esempio, come con tutti i sistemi CAS, anche in questo manipolatore l'inserimento dell'espressione è in forma sequenziale. Ciò comporta la necessità di utilizzare parentesi da parte dell'utente per definire in modo non ambiguo o scorretto la struttura dell'espressione che si vuole inserire. Per esempio, se l'alunno vuole ottenere la seguente struttura $\frac{a+b}{3}$, dovrà digitare la seguente forma sequenziale (a+b)/3.

Inserita un'espressione è possibile esplorare dinamicamente la sua struttura attraverso l'individuazione di tutte le sue parti costituenti. Ciò si realizza attraverso lo spostamento del mouse nel corpo dell'espressione che permette di evidenziare dinamicamente le parti costituenti (vedi fig. 9).

Sottolineiamo che questa proprietà, ovviamente non presente lavorando con carta e penna, differenzia questo manipolatore anche da molti sistemi CAS.

La selezione di una parte dell'espressione per compiere su di essa una trasformazione avviene, come in normali CAS, attraverso il trascinamento del mouse sulla parte che si vuole selezionare.
Selezionata la parte di espressione, gli assiomi dell'interfaccia che possono essere applicati su di essa diventano attivi colorandosi in modo diverso (vedi figura 10).

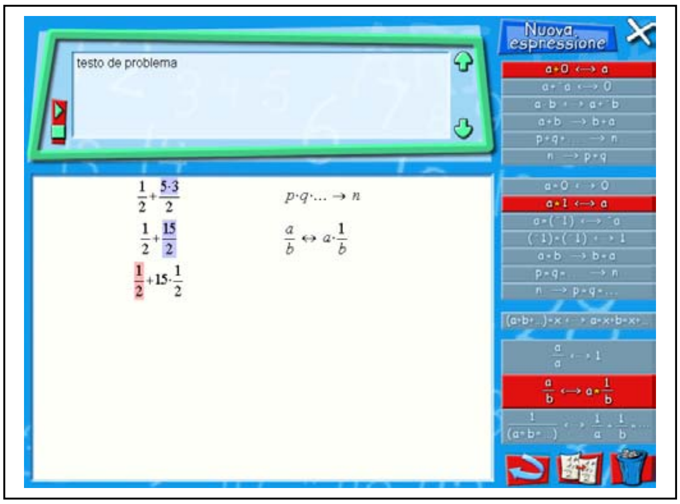


Figura 10. Esempio di trasformazione simbolica

Questa proprietà, che è caratteristica di questo micromondo e lo differenzia da altri sistemi, può svolgere una funzionalità didattica molto importante soprattutto nel primo approccio alla manipolazione simbolica, quando lo studente non ha ancora una padronanza del campo di applicazione dei vari assiomi. L'uso di uno degli assiomi attivi sulla parte di espressione selezionata porta alla visualizzazione sullo schermo della trasformazione operata.
In figura 10 troviamo un esempio di alcuni passi di un processo di trasformazione simbolica.
Possiamo notare che questo manipolatore tiene traccia delle selezioni effettuate sulle espressioni, dell'assioma applicato sulla selezione e ovviamente dell'effetto prodotto attraverso l'applicazione dell'assioma.
Osserviamo che la parte di interfaccia del micromondo dove sono reificati gli assiomi definisce metaforicamente il dominio teorico che sta alla base delle trasformazioni simboliche ed è uno strumento importante di mediazione didattica in relazione alla dialettica tra teoria e pratica che caratterizza la conoscenza algebrica. Per quanto riguarda gli aspetti pratici della matematica osserviamo che il micromondo fornisce all'alunno strumenti che gli consentono di realizzare l'intero processo di trasformazione di un'espressione attraverso passi facilmente controllabili sia sul piano sintattico che semantico. Infatti, ogni comando disponibile produce una trasformazione elementare relativa all'assioma che esso reifica; tale trasformazione è inoltre sempre reversibile, in quanto l'applicazione dello stesso comando sulla parte di espressione trasformata porta a ripristinare lo stato iniziale. Per quanto riguarda gli aspetti teorici della matematica, osserviamo che il micromondo fornisce all'insegnante strumenti importanti per realizzare un approccio all'attività di trasformazione simbolica, intesa come un'attività di dimostrazione dell'equivalenza tra due forme, in base agli assiomi che caratterizzano il dominio teorico assunto come riferimento (Cerulli & Mariotti, 2002).

Le proprietà di questo micromondo, come quelle del Micromondo Frazioni, sono caratterizzate da due dimensioni: l'interattività e la dinamicità.
L'interattività si esprime attraverso la retroazione che l'alunno riceve dal sistema quando seleziona una parte di un'espressione e vengono resi disponibili gli assiomi che possono essere applicati su di essa.
L'interattività si esprime inoltre attraverso la visualizzazione sullo schermo dell'effetto prodotto dall'applicazione di un assioma.
La dinamicità si esprime nella possibilità di poter esplorare le parti costituenti di una espressione sulle quali possono essere realizzate trasformazioni.

Descrizione di un percorso didattico che sfrutta le funzionalità didattiche dei micromondi

In questa sezione vogliamo evidenziare come è possibile sfruttare le funzionalità didattiche dei due micromondi per realizzare un percorso didattico innovativo centrato su un approccio ai numeri razionali e alle frazioni ben fondato anche sul piano concettuale e teorico.
A tal fine faremo riferimento ad una sperimentazione condotta in una classe di prima media (età 11-12 anni). La sperimentazione è stata realizzata secondo il metodo di laboratorio di matematica indicato dalla CIIM ed è stata caratterizzata da una serie di attività principalmente basate su un'esplorazione attiva di proprietà dei numeri razionali e delle frazioni attraverso l'uso del Micromondo Frazioni, sulla discussione intorno alle tecniche operative impiegate e ai risultati conseguiti e sull'attività cooperativa.
La classe, costituita da 20 studenti, è stata divisa in due gruppi in modo che ogni studente avesse a disposizione un PC. La sperimentazione si è protratta per un periodo di 22 ore (due ore a settimana per gruppo per circa 3 mesi e mezzo).
L'insegnante che ha effettuato questa sperimentazione, coautrice di questo articolo, aveva in precedenza già realizzato varie sperimentazioni attraverso l'uso dell'artefatto su carta. Era quindi in grado di cogliere le differenze e le potenzialità didattiche offerte dall'uso dei nuovi artefatti basati su calcolatore attraverso un confronto con la passata esperienza.
Il percorso didattico è stato suddiviso nei seguenti 5 moduli riportati in tabella:

Moduli	Finalità del modulo
Modulo1 Ripartizioni	Permettere agli studenti di sviluppare il concetto di ripartizione, operando su lunghezze della semiretta dei numeri tramite i comandi disponibili del micromondo.
Modulo 2. Frazioni	Costruire un significato di frazione come relazione parte intero, cioè come descrizione della ripartizione di una lunghezza in parti.
Modulo 3. Ordinamento di frazioni	Esplorare proprietà relative all'ordinamento di frazioni.
Modulo 4. Frazioni equivalenti	Permettere agli studenti di costruirsi un'idea dell'insieme dei numeri razionali come insieme infinito di classi di equivalenza i cui elementi sono frazioni.
Modulo 5. Operazioni tra frazioni	Consentire agli studenti di esplorare e giustificare le regole relative alle operazioni tra frazioni.

Vediamo più in dettaglio le caratteristiche principali delle attività dei vari moduli.
<u>Attività del modulo 1: Ripartizioni</u>
Questo modulo è costituito da tre attività orientate allo sviluppo del concetto di ripartizione.

La prima attività richiede di ripartire la lunghezza unitaria della semiretta dei numeri in 4 parti. Per svolgere questo compito gli alunni hanno a disposizione tre comandi: il comando che permette di modificare dinamicamente l'unità di misura sulla semiretta dei numeri e sulla semiretta ripartitrice, il comando che permette di costruire il segmento generatore della ripartizione (congiungendo il punto 1 sulla semiretta dei numeri con il punto 4 della semiretta ripartitrice), il comando che permette di realizzare la ripartizione costruendo i segmenti paralleli al segmento generatore passanti per i punti 3, 2, e 1 della semiretta ripartitrice.
La seconda attività serve sostanzialmente come rafforzamento della prima e richiede di ripartire la lunghezza 5 sulla semiretta dei numeri in 3 parti. La terza attività è orientata all'esplorazione e alla riflessione sulle proprietà invarianti della ripartizione. Con questo artefatto è possibile infatti osservare, mediante l'uso di opportuni comandi, che modificando l'unità di misura sulla semiretta ripartitrice e/o l'angolo di inclinazione tra le due semirette, la ripartizione resta invariata, mentre modificando l'unità di misura sulla semiretta dei numeri si conserva la ripartizione.
Nello sviluppo di queste tre attività il ruolo dello strumento è stato decisivo. Con il micromondo la costruzione della ripartizione risulta più accurata e più facile da realizzare che con l'artefatto geometrico su carta. Il micromondo, inoltre, consente di sfruttare le sue caratteristiche dinamiche per esplorare e osservare le proprietà invarianti di una ripartizione.
<u>Attività del modulo 2: Frazioni</u>
Questo modulo è costituito da due attività orientate alla rappresentazione di frazioni sulla semiretta dei numeri, come ripartizione di lunghezze in parti, e alla costruzione di un significato di frazione, come relazione parte intero.
La prima attività richiede allo studente di ipotizzare le frazioni che corrispondono ai punti della ripartizione di 1 in 4 parti realizzata nel modulo precedente. Dopo che gli studenti hanno scritto e discusso le loro ipotesi relative alle frazioni corrispondenti ai punti della ripartizione vengono invitati ad utilizzare lo strumento per verificare le loro ipotesi utilizzando un apposito comando che consente di rappresentare frazioni sulla semiretta dei numeri. Come già illustrato in precedenza, tale comando fornisce un feedback grafico relativo alla ripartizione associata alla frazione costruita. Attraverso tale feedback, lo studente ha la possibilità di cogliere sul piano percettivo che la frazione corrispondente al primo punto della ripartizione da lui realizzata corrisponde al punto 1/4 e quindi di capire come la combinazione di 1 e di 4 possa fornire un significato per la notazione 1/4. Un altro comando (il comando di moltiplicazione) consente inoltre di associare le espressioni 1/4*2, 1/4*3, 1/4*4 ai rimanenti punti della ripartizione, incluso il punto 1.
La seconda attività è orientata a mettere in evidenza la seguente relazione: a/b=a*1/b lavorando su casi affrontati nell'attività precedente e cioè 1/4*2=2/4, 1/4*3=3/4, 1/4*4=4/4. Ciò si realizza sfruttando due caratteristiche del sistema. La prima, di tipo geometrico permette di evidenziare che i due differenti metodi costruttivi relativi per esempio a 1/4*3 e a 3/4 conducono alla realizzazione di punti coincidenti sulla semiretta dei numeri (nel micromondo una coincidenza solo apparente di punti è disambiguabile attraverso un cambiamento dell'unità di misura sulla semiretta dei numeri). La seconda caratteristica, di tipo simbolico, porta a visualizzare nello stesso post-it associato al punto le due espressioni (come abbiamo già visto, nel micromondo, ad ogni punto è associato un post-it che contiene tutte le espressioni relative ai loro processi di costruzione).

Attività del modulo 3: Ordinamento di frazioni

Questo modulo è costituito da 5 attività orientate all'esplorazione delle proprietà relative all'ordinamento di frazioni.

Nella prima attività viene richiesto agli alunni di rispondere alla seguente domanda: "Secondo te 1/5 è più grande o più piccolo di 1/7, cioè 1/5 cadrà prima o dopo di 1/7 sulla semiretta dei numeri?" Formulate le loro ipotesi e le loro giustificazioni gli alunni vengono invitati ad utilizzare il micromondo per verificarle.

La seconda attività richiede di costruire un certo numero di frazioni aventi numeratore unitario. Attraverso questa attività si vuole portare lo studente all'appropriazione della seguente relazione d'ordine delle frazioni: se $a<b$ e $a>0$, $b>0$, allora $1/a>1/b$. L'attività è inoltre orientata all'esplorazione e all'osservazione di proprietà e regolarità che caratterizzano l'ordinamento di frazioni con numeratore unitario.

La terza attività richiede agli studenti di formulare ipotesi su quali caratteristiche deve possedere una frazione a/b per essere situata tra 1/2 e 1 ($a<b$, $a>b/2$ con $a>0$ e $b>0$).

Una quarta attività, analoga alla precedente, è volta a determinare le proprietà delle frazioni che risultano maggiori di 1. Queste due ultime attività sono orientate all'esplorazione delle proprietà che caratterizzano le frazioni proprie e improprie.

La quinta attività richiede di costruire frazioni più grandi o più piccole di una data. Si vogliono così introdurre le due proprietà: $a/b<(a+1)/b$ e $a/b>a/(b+1)$ con $a>0$ e $b>0$.

Rispetto all'artefatto cartaceo il micromondo consente di costruire rapidamente un alto numero di frazioni avente numeratore unitario, senza problemi di ambiguità. Consente inoltre di giustificare in termini di relazioni tra ripartizioni le proprietà osservate relative all'ordinamento di frazioni.

Attività del modulo 4: frazioni equivalenti.

Questo modulo, costituito da 2 attività, è stato progettato per permettere agli studenti di costruirsi un'idea dell'insieme dei numeri razionali come insieme infinito di classi di equivalenza i cui elementi sono frazioni.

Con la prima attività si richiede di determinare, mediante una esplorazione, alcune frazioni equivalenti ad alcune frazioni assegnate. Attraverso un approccio per tentativi ed errori gli alunni utilizzano il micromondo per ricercare frazioni con le seguenti caratteristiche:

- il punto corrispondente alla frazione cercata coincida con quello relativo alla frazione data e precedentemente rappresentata,
- le notazioni delle due frazioni siano contenute nel post-it associato a tale punto.

Una specifica richiesta di questa attività orienta inoltre lo studente verso la costruzione del segmento generatore delle frazioni tra loro equivalenti. Costruite un certo numero di frazioni equivalenti a quelle assegnate, inizia una fase di riflessione e discussione in classe volta a individuare:

- le regolarità numeriche che caratterizzano frazioni equivalenti contenute in uno stesso post-it;
- le regolarità geometriche (parallelismo dei segmenti generatori) delle frazioni fra loro equivalenti.

La discussione in classe è orientata a mettere in evidenza che ogni punto costruito sulla semiretta dei numeri può essere messo in relazione con una classe di frazioni tra loro equivalenti, teoricamente infinite, contenute in un unico post-it e che queste frazioni presentano la caratteristica di avere i segmenti generatori tra loro paralleli.

Il micromondo consente di utilizzare metaforicamente il punto, per parlare di numero razionale, e il post-it contenente frazioni tra loro equivalenti o i segmenti generatori tra loro paralleli, per parlare di classi di equivalenza.

La seconda attività è orientata ad utilizzare il concetto di frazione equivalente per risolvere compiti di confronto e ordinamento di frazioni.
Rispetto all'artefatto geometrico su carta risultano evidenti le funzionalità didattiche fornite dal micromondo sia in termini di supporto per l'operatività dello studente sia in termini di feedback resi disponibili dal sistema che consentono di realizzare un uso metaforico degli oggetti rappresentati per favorire la concettualizzazione del numero razionale e delle frazioni.
Attività del modulo 5: operazioni tra frazioni
Le attività di questo modulo sono di natura fortemente collaborativa. Agli alunni viene presentato un nuovo artefatto, il Simulatore, che consente di realizzare simulazioni e di rivederle in una sorta di filmato. Per realizzare una simulazione gli alunni operano nel Micromondo Frazioni del Simulatore; ogni loro azione realizzata viene memorizzata dal sistema. In ogni momento l'alunno può utilizzare uno specifico comando che consente di memorizzare un commento vocale in relazione alle azioni compiute o che si vogliono compiere.
E' poi possibile tramite il Player del Simulatore rivedere in una sorta del filmato quanto realizzato nel micromondo e sentire i commenti vocali registrati. Il Simulatore presenta funzionalità analoghe a quelle del comando storia di Cabri-Géomètre con in più la possibilità di inserire e successivamente ascoltare commenti vocali associati alle azioni compiute.
La classe può essere suddivisa in gruppi di due o tre alunni ai quali vengono date le seguenti consegne:
- utilizzare il Micromondo Frazioni di ARI-LAB-2 per individuare le regole relative all'operazione di somma tra frazioni, prima operando con frazioni aventi denominatore uguale e successivamente con frazioni aventi denominatore diverso;
- produrre collettivamente una sceneggiatura orientata alla realizzazione di una lezione con il simulatore in grado di spiegare e giustificare le regole individuate;
- utilizzare il simulatore per registrare tale sceneggiatura.
L'uso integrato del Micromondo Frazioni di ARI-LAB-2 e del Simulatore attraverso la metodologia didattica descritta ha mostrato forti potenzialità didattiche in quanto ha consentito agli studenti di elaborare ipotesi relative alle regole della somma di frazioni, validarle o confutarle attraverso l'uso del micromondo, giustificarle sfruttando gli effetti di ripartizione prodotti dal sistema associati ai comandi utilizzati.
I prodotti di simulazione realizzati collettivamente dai gruppi di alunni con la supervisione dell'insegnante testimoniano le potenzialità didattiche di tali sistemi.

Quanto descritto in precedenza costituisce il percorso didattico sperimentato in classe.
Nel prossimo anno scolastico ci proponiamo di continuare questo percorso didattico secondo le seguenti due linee di sviluppo. La prima linea è relativa alla continuazione dell'uso integrato del Simulatore con il Micromondo Frazioni di ARI-LAB-2 per consentire agli studenti di esplorare e giustificare le regole relative alle altre operazioni con frazioni. La seconda linea riguarda l'introduzione nella pratica didattica del Micromondo di Manipolazione Aritmetica per dimostrare formalmente proprietà delle frazioni evidenziate nei cinque moduli del percorso didattico descritto.
A tale riguardo ci sembra utile presentare come intenderemo utilizzare questo micromondo.

Il Micromondo di Manipolazione Aritmetica fornisce un supporto per aiutare gli alunni nell'approccio alla dimostrazione. In tale micromondo gli alunni possono ripercorrere i passi compiuti nel Micromondo Frazioni e giustificarli dal punto di vista

formale e teorico. Immaginiamo per esempio di voler dimostrare formalmente la regola della somma di due frazioni con uguale denominatore individuata precedentemente attraverso l'uso del Micromondo Frazioni e giustificata empiricamente sfruttando le sue caratteristiche geometriche.
Si consideri per esempio di richiedere all'alunno di utilizzare il Micromondo di Manipolazione Aritmetica per dimostrare che 2/5+4/5 = (2+4)/5 = 6/5. Utilizzando gli assiomi disponibili attraverso l'interfaccia del sistema è possibile compiere le trasformazioni riportate in figura 11 che porta alla dimostrazione nel caso particolare indicato.

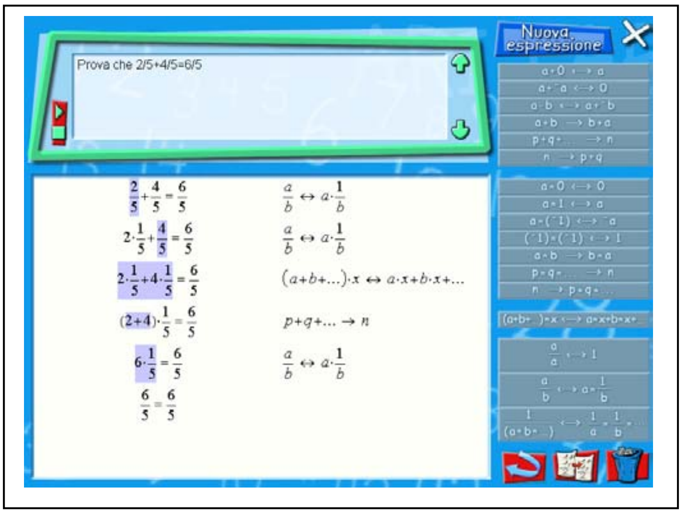


Figura 11. Giustificazione teorica di 2/5+4/5=(2+4)/5=6/5 nel Micromondo di Manipolazione Aritmetica

In questo manipolatore è possibile generalizzare il risultato trovato proponendo di dimostrare che $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Questo approccio descritto caratterizza il modo in cui intendiamo utilizzare questo micromondo per dimostrare tutte le proprietà dei numeri razionali e delle operazioni con frazioni che sono state individuate in questo percorso didattico.

Conclusioni

Questo lavoro è centrato sull'analisi dei processi che ci hanno portato alla realizzazione di due nuovi artefatti a supporto di una didattica sui numeri razionali e all'approccio alla dimostrazione. Abbiamo descritto e giustificato le scelte che hanno portato alla progettazione e implementazione dei due artefatti e abbiamo illustrato un percorso didattico che sfrutta le loro funzionalità didattiche per consentire un approccio consapevole ai numeri razionali e alle frazioni.
Come abbiamo sottolineato, si tratta di due artefatti molto flessibili che si prestano anche allo sviluppo di pratiche didattiche diverse da quella qui presentata.
E' nostro interesse studiare l'uso in contesto di questi micromondi e analizzare e confrontare tra di loro nuove pratiche didattiche che possono emergere dal riconoscimento di nuove funzionalità didattiche nei due micromondi.

Bibliografia

Artigue, M. (2001): Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *Paper presented at CAME 2001*, Freudenthal Institute, University of Utrecht.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cerulli M., Mariotti M. A. (2002): L'Algebrista: un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algébre. *Sciences et Techniques Educatives Logiciels pour l'apprentissage de l'algébre*, Vol. 9 - n. 1-2, pg. 149-170. Hermes Science Publication, Lavoisier. Paris.

Chiappini, G., Molinari M., (1997): Approccio alle frazioni. Uso delle lettere nella riflessione sui numeri frazionari, *Atti di SFIDA 8* (Drouard J.P., Maurel M. eds), IREM, Nice.

Chiappini, G., Molinari M., (1998): Presentazione di un metodo di approccio alle disequazioni con ragazzi di 11-12 anni, *Atti di SFIDA 10* (Drouard J.P., Maurel M. eds), IREM, Nice.

Chiappini, G., Molinari M, Sibilla A., (2000): Riflessioni su alcune condizioni d'uso della scrittura algebrica efficaci per l'apprendimento matematico, *Atti di SFIDA 14* (Drouard J.P., Maurel M. eds), IREM, Nice.

Chiappini G.P., Pedemonte G., Robotti E., (2003) Mathematical teaching and learning environment mediated by ICT, C. Dowling, K-W. Lai (eds.), *Information and Communication Technology and the Teacher of the Future*, Kluwer Academic Publishers.

Kieran T: (1975), On the mathematical cognitive and instructional foundation of rational numbers, in R.Lesh (ed), *Number and measurement*, pp 101-144, Columbus, Ott: Eric/SMEAC

Mariotti M.A:, (2002), The influence of technological advances on students' mathematics learning, in L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education*, pp 695-724, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher

Rabardel, P. (1995): *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Sfard, A. (1991): On the double nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36